4. МЕТОДЫ РАСЧЁТА РЕЗИСТИВНЫХ СХЕМ

В данной главе рассматриваются методы расчёта, применяемые при анализе линейных схем в статическом режиме, т. е. при постоянных сигналах.

В соответствии с компонентными уравнениями (1.4) и (1.7), при постоянном токе напряжение на индуктивности равно нулю, а при постоянном напряжении ток ёмкости равен нулю:

$$\begin{aligned} u_L &= L\frac{di_L}{dt}\bigg|_{i_L=const} = 0 \\ i_C &= C\frac{du_C}{dt}\bigg|_{u_C=const} = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Соответственно, в статическом режиме катушки индуктивности и конденсаторы заменяются своими внутренними сопротивлениями.

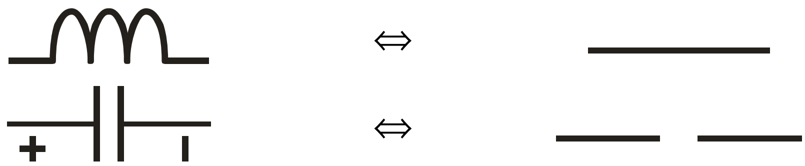

Рис. 4-7. Замена идеальной индуктивности и ёмкости в статическом режиме

В схеме остаются только постоянные источники питания и сопротивления; такие схемы называются *резистивными*. Методы расчёта, рассмотренные для резистивных схем, лишь с небольшими изменениями применяются и для расчёта более сложных схем в динамических режимах.

Далее рассмотрены следующие основные методы и принципы расчёта резистивных схем:

- расчёт цепей по законам Кирхгофа,
- метод эквивалентного преобразования элементов,
- метод наложения,
- метод эквивалентного источника,
- метод узловых потенциалов,
- метод контурных токов.

Задача расчёта схемы по любому из методов ставится следующим образом: заданы топология схемы и параметры элементов цепи (R, E, J), требуется найти все или некоторые токи и напряжения цепи.

4.1. Расчёт цепей по законам Кирхгофа

Метод решения схем на основе ЗТК и ЗНК предназначен, прежде всего, для нахождения токов во всех ветвях. Обладая этой информацией, можно легко найти и напряжения во всех узлах, а также другие электрические параметры схемы.

Для решения схемы составляется система уравнений, включающая в себя набор уравнений по ЗТК и набор уравнений по ЗНК. Размерность этой системы совпадает с количеством неизвестных. В общем случае уравнения дифференциальные, в случае линейной схемы уравнения линейные дифференциальные, а в случае линейной резистивной схемы уравнения линейные алгебраические.

Количество необходимых уравнений по ЗТК равно количеству главных сечений, равно количеству ветвей дерева, равно количеству узлов минус 1:

$$N_{ЗТК} = У - 1 \tag{4.2}$$

Количество необходимых уравнений по ЗНК равно количеству главных контуров, равно количеству ветвей связи, равно количеству ветвей минус количество ветвей дерева, равно количеству ветвей минус количество узлов плюс 1:

$$N_{ЗНК} = В - У + 1 \tag{4.3}$$

Не следует включать ветви с известными токами (например, ветви с источниками тока) больше, чем в один контур.

В случае, если ищутся только токи ветвей, то не следует составлять уравнения для контуров с известными контурными токами; в этом случае $N_{ЗНК} = В - У + 1 - N_J$. Если источник тока входит одновременно в несколько контуров, то следует один из них оставить, а вместо остальных выбрать другие контуры, не содержащие источников тока.

Способы составления систем уравнений по ЗТК: а) узловой, б) формализованный, в) матричный.

Способы составления уравнений по ЗНК: а) контурный, б) формализованный, в) матричный.

4.1.1. Узловой способ составления уравнений по ЗТК

Уравнения составляются по первому закону Кирхгофа для узлов. При выборе узлов, для которых записывается ЗТК, рекомендуется использовать узлы, к которым сходится наименьшее количество ветвей (чтобы уменьшить сложность уравнений). Токи, втекающие в узел, суммируются со знаком «+», вытекающие – со знаком «–». Для схемы рис. 2-4 можно составить следующую систему:

$$\begin{array}{l} B: \\ D: \\ C: \end{array} \begin{cases} -I_3+I_4-I_5=0 \\ -I_1+I_5-I_6=0 \\ I_2-I_4+I_6=0 \end{cases} \tag{4.4}$$

4.1.2. Формализованный способ составления уравнений по ЗТК

Уравнения составляются по первому закону Кирхгофа для главных сечений (см. рис. 2-7, в, г, д). Токи ветвей связи (входящих в главное сечение), совпадающих по направлению с ветвью дерева (входящей в главное сечение), суммируются со знаком «+», не совпадающие – со знаком «–». Для схемы рис. 2-4 можно составить следующую систему:

$$\begin{array}{l} S_3: \\ S_4: \\ S_6: \end{array} \begin{cases} I_3-I_2+I_1=0 \\ I_4-I_5+I_1-I_2=0 \\ I_6-I_5+I_1=0 \end{cases} \tag{4.5}$$

4.1.3. Контурный способ составления уравнений по ЗНК

Уравнения составляются по второму закону Кирхгофа для произвольных контуров (рекомендуется выбирать наиболее короткие или выбирать ячейки, т. е. контура, не имеющие внутренних ветвей). Направление обхода выбирается произвольно. Для схемы рис. 2-4 можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{l} K_I: \\ K_{II}: \\ K_{III}: \end{array} \begin{cases} U_1+U_2-U_6=0 \\ -U_3-U_4-U_2=0 \\ U_4+U_5+U_6=0 \end{cases} \tag{4.6}$$

В случае, если ищутся только токи ветвей, не нужно составлять уравнение для первого контура, содержащего источник тока, и система (4.6) записывается в виде:

$$\begin{aligned} K_{II}: &\quad \begin{cases} I_3R_3 + I_2R_2 = E_3 + E_4 \\ I_5R_5 + I_6R_6 = E_4 \end{cases} \\ K_{III}: & \end{aligned} \qquad (4.7)$$

4.1.4. Формализованный способ составления уравнений по ЗНК

Уравнения составляются для главных контуров. Направление обхода контура, образуемого ветвью связи и несколькими ветвями дерева (вариантов обхода здесь нет), определяется направлением ветви связи. Для схемы рис. 2-4 (главные контура на рис. 2-8):

$$\begin{matrix} K_1: \\ K_2: \\ K_5: \end{matrix} \quad \begin{cases} U_1 - U_3 - U_4 - U_6 = 0 \\ U_2 + U_4 + U_3 = 0 \\ U_5 + U_6 + U_4 = 0 \end{cases} \qquad (4.8)$$

Если необходимо найти только токи во всех ветвях, то не следует использовать уравнение для главного контура, включающего ветвь связи с источником тока (т. к. её ток не нужно искать — он известен). Кроме того, все U_n нужно сразу выражать через токи ветвей, а источники э. д. с. вынести в правую часть:

$$\begin{matrix} K_2: \\ K_5: \end{matrix} \quad \begin{cases} I_2R_2 + I_3R_3 = E_4 + E_3 \\ I_5R_5 + I_6R_6 = E_4 \end{cases} \qquad (4.9)$$

4.1.5. Составление полной системы уравнений

Для решения схемы необходимо объединить систему уравнений по ЗТК с системой уравнений по ЗНК и получить полную систему уравнений, описывающую данную схему.

Система уравнений, составленная по формализованному способу для поиска токов в схеме рис. 2-4, представляет собой следующее выражение:

$$\begin{matrix} S_3: \\ S_4: \\ S_6: \\ K_2: \\ K_5: \end{matrix} \quad \begin{cases} I_3 - I_2 + I_1 = 0 \\ I_4 - I_5 + I_1 - I_2 = 0 \\ I_6 - I_5 + I_1 = 0 \\ I_2R_2 + I_3R_3 = E_4 + E_3 \\ I_5R_5 + I_6R_6 = E_4 \end{cases} . \qquad (4.10)$$

При составлении дерева в него не включается ветвь 1, содержащая источник тока (см. рис. 2-6). При составлении уравнений по ЗНК уравнения для этой ветви не составляются (т. к. её ток известен).

Система уравнений, составленная по узловому и контурному способу, представляет собой следующее выражение:

$$\begin{array}{ll} B: & \left\{\begin{array}{l} -I_3+I_4-I_5=0 \\ -I_1+I_5-I_6=0 \\ I_2-I_4+I_6=0 \\ I_3R_3+I_2R_2=E_3+E_4 \\ I_5R_5+I_6R_6=E_4 \end{array}\right. \\ D: & \\ C: & \\ K_{II}: & \\ K_{III}: & \end{array} \tag{4.11}$$

Обе системы (4.10) и (4.11) представляют собой совокупность пяти линейных уравнений с пятью неизвестными — токами ветвей.

Систему уравнений, такую как (4.10) или (4.11), можно записать в матричной форме — в виде матричного уравнения. В такой форме записи матрица коэффициентов при неизвестных токах умножается на вектор неизвестных токов, что приравнивается вектору свободных членов, в который выносятся известные величины (здесь номиналы источников).

Матричная форма записи системы (4.10):

$$\begin{array}{c} \\ S2 \\ S4 \\ S6 \\ K3 \\ K5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} -1 & +1 & & & \\ -1 & & +1 & -1 & \\ & & & -1 & +1 \\ +R_2 & +R_3 & & & \\ & & & +R_5 & +R_6 \end{array}\right]\end{array} \times \left[\begin{array}{c} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -I_1 \\ -I_1 \\ -I_1 \\ E_3+E_4 \\ E_4 \end{array}\right] \tag{4.12}$$

Матричная форма записи системы (4.11):

$$\begin{array}{c} \\ B \\ D \\ C \\ K\,II \\ K\,III \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} & -1 & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & & 1 \\ +R_2 & +R_3 & & & \\ & & & +R_5 & +R_6 \end{array}\right]\end{array} \times \left[\begin{array}{c} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \\ I_1 \\ \\ E_3+E_4 \\ E_4 \end{array}\right] \tag{4.13}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\times\mathbf{I}=\mathbf{B} \\ \mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{gathered} \tag{4.14}$$

Размерности матриц и векторов определяются количеством неизвестных. Если количество неизвестных n, то размерность матрицы $n \times n$, длина векторов n. Порядок строк матрицы и элементов векторов соответствует порядку перечисления уравнений; порядок колонок матрицы соответствует порядку перечисления неизвестных в столбце неизвестных.

Матрицу можно составить непосредственно, т. е. без предварительной записи самих уравнений, а затем решить специальными матричными методами:

- привести матрицу к единичному виду;
- с помощью определителей;
- с помощью математических программ, реализующих общие методы (MathCAD, Mathlab и т. п.).

В результате решения системы уравнений (4.10) или (4.11) или матрицы (4.12) или (4.13) получается вектор токов.

Система, составленная формализованным методом, задаёт нужное количество независимых уравнений: уравнения по ЗТК составляются для главных сечений, т. е. для ветвей дерева (т. к. каждое главное сечение включает одну и только одну ветвь дерева); уравнения по ЗНК составляются для главных контуров, т. е. для ветвей связи (т. к. каждый главный контур включает одну и только одну ветвь связи). *Таким образом, каждое из уравнений включает одну новую переменную* и одну новую связь. Т. к. каждая ветвь графа является либо ветвью дерева, либо ветвью связи, то общее количество уравнений равно количеству ветвей, т. е. количеству неизвестных токов (что и требовалось).

4.1.6. Использование программы Mathcad для решения матричных уравнений

…