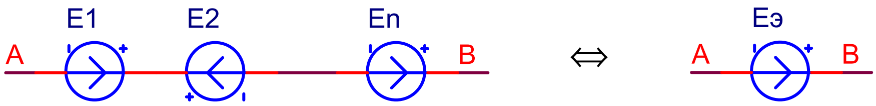
4.2. Метод непосредственного (эквивалентного) преобразования элементов

При решении схемы методом непосредственного преобразования элементов используют серию эквивалентных преобразований схемы, направленных на упрощение схемы. Понятие *эквивалентного преобразова-*

ния подразумевает такое изменение состава и/или топологии фрагмента схемы, при котором не изменяются электрические показатели (токи и напряжения) в остальных частях схемы, не затронутых преобразованием. Такое обстоятельство означает, что величины, найденные для одной из эквивалентных схем (искомые или вспомогательные), действительны и для любой другой из эквивалентных схем.

4.2.1. Последовательное соединение источников э. д. с.

Последовательное соединение нескольких идеальных источников э. д. с. можно заменить одним эквивалентным источником э. д. с., величина которого будет равна алгебраической сумме величин суммируемых источников, причём величина суммируемого источника берётся со знаком «+», если его направление совпадает с направлением эквивалентного источника, и со знаком «–», если они противоположны:

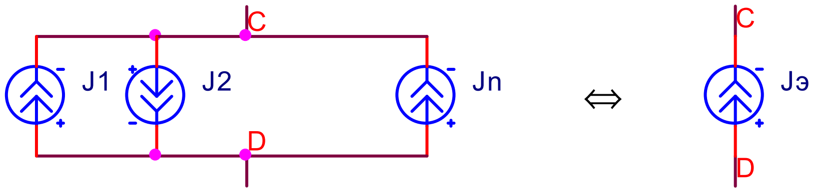


$$e_э = \sum_{k=1}^{n} \pm e_k \qquad (4.15)$$

Параллельное соединение нескольких (двух и больше) неравных идеальных источников э. д. с. нефизично, а потому недопустимо. Если в результате составления ЭСЗ (схемы замещения) возникла такая ситуация, то вероятнее всего требуется источники питания заменить более сложными моделями, учитывающими их внутреннее сопротивление.

4.2.2. Последовательное соединение источников тока

Параллельное соединение нескольких идеальных источников тока можно заменить одним эквивалентным источником тока, величина которого будет равна алгебраической сумме величин суммируемых источников, причём величина суммируемого источника берётся со знаком «+», если его направление совпадает с направлением эквивалентного источника, и со знаком «–», если они противоположны:

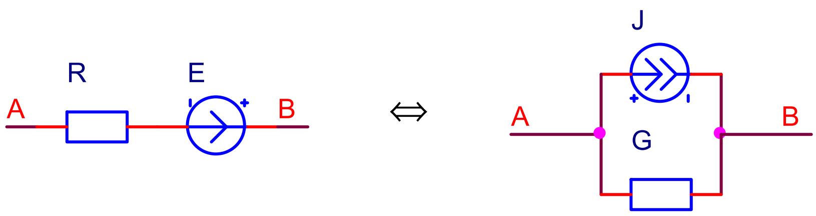


$$j_э = \sum_{k=1}^{n} \pm j_k \qquad (4.16)$$

Последовательное соединение нескольких неравных идеальных источников тока нефизично, а потому недопустимо. Если в результате составления ЭСЗ (схемы замещения) возникла такая ситуация, то вероятнее всего требуется источники питания заменить более сложными моделями, учитывающими их внутреннее сопротивление.

4.2.3. Взаимозаменяемость источников э. д. с. и тока

В любом месте схемы можно взаимно заменять фрагменты, состоящие их последовательно включённых идеального источника э. д. с. и резистора, и фрагменты, состоящие из параллельно включённых идеального источника тока и резистора (две формы источника питания):



Связь их параметров определяется соотношениями:

$$g = \frac{1}{r}, j = \frac{e}{r} \qquad (4.17)$$

4.2.4. Последовательное соединение сопротивлений — правило делителя напряжения

Рассмотрим схемный фрагмент, изображённый на рис. 4-8. Решим задачу анализа данной схемы. Пусть известна топология, номиналы элементов, а также внешнее напряжение и ток. В результате анализа необходимо найти эквивалентное сопротивление схемы $R_Э$, а также ток каждого элемента и напряжение на каждом элементе.

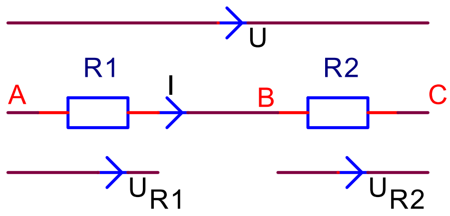


Рис. 4-8. Последовательное соединение сопротивлений

При последовательном соединении элементов равны токи, протекающие через каждый их них:

$$I = I_1 = I_2 \tag{4.18}$$

Рассмотрим теперь напряжения вдоль ветви.

Суммарное напряжение ветви, в соответствии со вторым законом Кирхгофа, равно сумме напряжений отдельных элементов:

$$U = U_1 + U_2 = I_1R_1 + I_2R_2 = I\left(R_1 + R_2\right). \tag{4.19}$$

Выражение (4.19) по форме представляет собой закон Ома, связывающий внешнее напряжение U и внешний ток I. Таким образом коэффициент пропорциональности в этой формуле представляет собой эквивалентное сопротивление $R_э$ двух последовательно соединённых сопротивлений:

$$R_э = R_1 + R_2 \tag{4.20}$$

Напряжения на отдельных сопротивлениях находятся по закону Ома, где значение полного тока I выражено из уравнения (4.19):

$$\begin{aligned} U_{\boxed{1}} &= IR_1 = U\frac{R_{\boxed{1}}}{R_1 + R_2} \\ U_{\boxed{2}} &= IR_2 = U\frac{R_{\boxed{2}}}{R_1 + R_2}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

В выражении (4.21) в числителе записана величина сопротивления, на котором ищется напряжение, а в знаменателе сумма сопротивлений, между которыми делится напряжение.

Выражение (4.21) называется *правилом делителя напряжения*.

4.2.5. Параллельное соединение сопротивлений — правило делителя тока

Рассмотрим схемный фрагмент, изображённый на рис. 4-9. Решим задачу анализа данной схемы. Пусть известна топология, номиналы элементов, а также внешнее напряжение и ток. В результате анализа необходимо найти эквивалентное сопротивление схемы $R_Э$, а также ток каждого элемента и напряжение на каждом элементе.

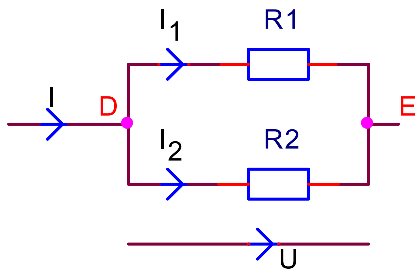


Рис. 4-9. Параллельное соединение сопротивлений

При параллельном соединении сопротивлении равны напряжения на каждом из них:

$$U = U_1 = U_2 \tag{4.22}$$

Рассмотрим теперь токи в параллельных ветвях.

Суммарный ток по первому закону Кирхгофа для узла D равен:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{4.23}$$

Выражение (4.23) по форме представляет собой закон Ома, связывающий внешнее напряжение U и внешний ток I. Таким образом коэффициент пропорциональности в этой формуле представляет собой эквивалентное сопротивление $R_э$ двух параллельно соединённых сопротивлений:

$$\frac{1}{R_э} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \text{ или } R_э = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.24}$$

Токи через отдельные сопротивления находятся по закону Ома, где значение внешнего напряжения U выражено из уравнения (4.23):

$$\begin{aligned} I_{\boxed{1}} &= \frac{U}{R_1} = \frac{1}{R_1} \cdot I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I \frac{R_{\boxed{2}}}{R_1 + R_2}, \\ I_{\boxed{2}} &= \frac{U}{R_2} = I \frac{R_{\boxed{1}}}{R_1 + R_2} \end{aligned} \tag{4.25}$$

В выражении (4.25) в числителе записано значение сопротивления, противоположному тому, на котором ищется ток; в знаменателе записана сумма сопротивлений, между которыми делится ток.

Выражение (4.25) называется *правилом делителя тока*.

4.2.6. Смешанное соединение сопротивлений

□ *Пример 1. Пусть задано входное напряжение U в схеме* ,рис. 4-10, *требуется найти напряжение U_4, падающее на сопротивлении R_4.*

Эту задачу можно решить следующим образом.

1) В первую очередь следут проанализировать структуру схемы: сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, т. к. подключены к одной и той же паре точек; блок (R_1, R_2) и сопротивления R_3 и R_4 соединены последовательно;
2) Найти общий ток I данной схемы можно с использованием общего напряжения U и эквивалентного сопротивления $R_\text{э}$ схемы:
$$R_\text{э} = R_3 + R_1 \| R_2 + R_4$$
$$I = U / R_\text{э}$$
3) Так как сопротивления R_3, $R_1 \| R_2$ и R_4 подключены последовательно друг за другом, то общий ток I данной схемы протекает и через сопротивление R_4;
4) По закону Ома можно найти напряжение, падающее на сопротивлении R_4, через номинал сопротивления и значение протекающего через него тока:
$$U_4 = IR_4 . \blacksquare$$

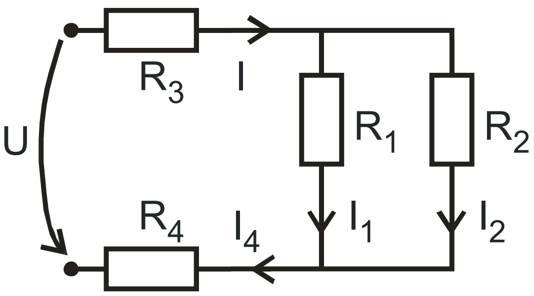


Рис. 4-10. Иллюстрация к задаче □ *Пример 1*

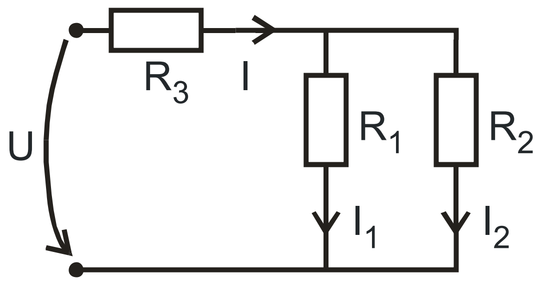


Рис. 4-11.Иллюстрация к задаче □ *Пример 2*

□ *Пример 2. Пусть задано входное напряжение U в схеме*рис. 4-11, *требуется найти ток I_1.*

Эту задачу можно решить так:

1) Анализ топологии схемы показывает, что сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, а блок $R_1 - R_2$ соединён последовательно с сопротивлением R_3.
2) Находится эквивалентное сопротивление всего фрагмента от точки 1 до точки 2:

$$R_э = R_3 + R_1 \parallel R_2 \quad \left(= R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right).$$

3) С использованием входного напряжения и общего сопротивления, находится входной ток по закону Ома: $I_{вх} = U / R_э$.
4) С использованием входного тока и номиналов сопротивлений R_1 и R_2 находится частный ток I_1 по правилу делителя тока:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \ ■$$

4.2.7. Взаимное преобразование трёхлучевой звезды и треугольника

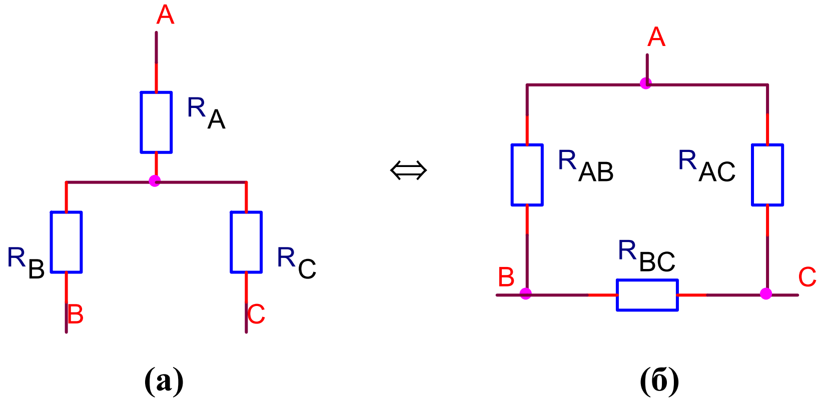


Рис. 4-12. Звезда (а) и треугольник (б)

На рис. 4-12 изображены более сложные структуры: треугольник (а) и звезда (б). Звезда представляет собой несколько сопротивлений (в данном случае 3), подсоединённых от одного узла к нескольким другим. Треугольник — частный случай многоугольника — представляет собой три сопротивления, образующие замкнутый контур с тремя узлами.

Преобразование одной из этих структур в другую может понадобиться для упрощения схемы, например для образования новых последовательных или параллельных комбинаций.

Эквивалентное преобразование звезды в треугольник и обратно осуществляется по следующим формулам:

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ac}} \quad \text{или} \quad R_a = \frac{1}{R_{ac}} + \frac{1}{R_{ab}} + \frac{R_{bc}}{R_{ab}R_{ac}}$$

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c} \qquad (4.26)$$

Формулы для поиска остальных сопротивлений симметричны (4.26).

Заметим, что при преобразовании звезды в треугольник внутренняя точка пропадает.

□ *Пример 3. Для схемы* рис. 4-13 *дано* $U_{вх} = U_{AD}$. *Найти* $U_{вых} = U_{CD}$.

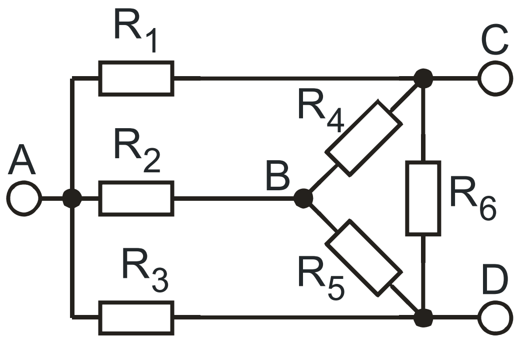


Рис. 4-13. Схема к задаче □ *Пример 3*

В схеме рис. 4-13 нет ни одной последовательной или параллельной комбинации сопротивлений, поэтому в данном случае следует использовать преобразование звезда–треугольник или обратное преобразование для упрощения схемы.

Почётное право решить данную задачу предоставляется читателю.■

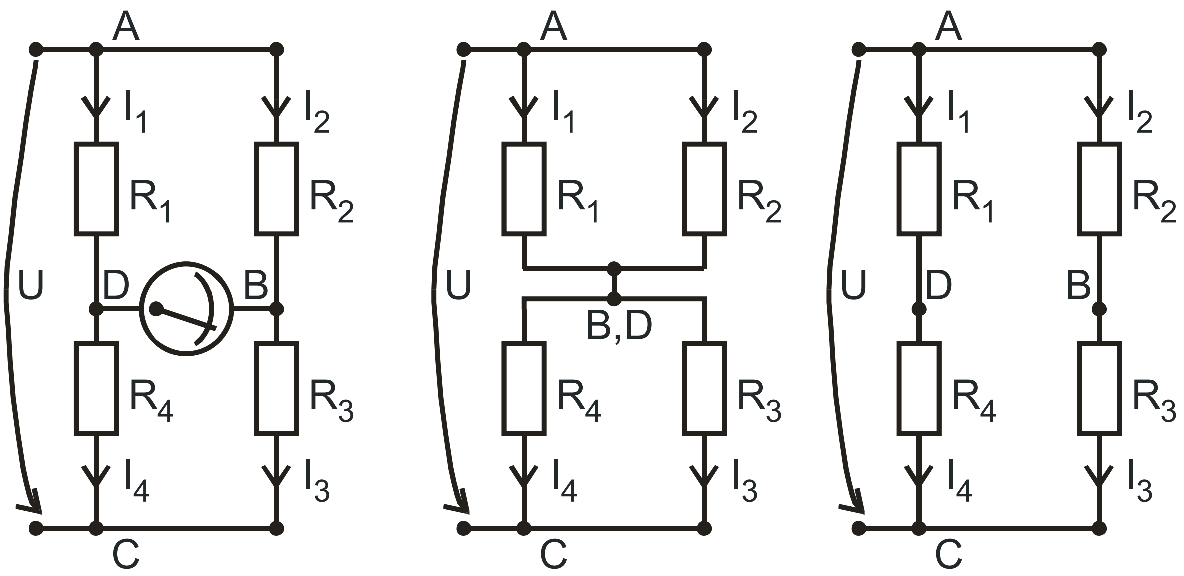
4.2.8. Примеры расчёта с использованием непосредственного преобразования сопротивлений

На рис. 4-14, а изображена мостовая схема (мост), представляющая собой ромб из сопротивлений. На входную диагональ A–C данного моста подаётся сигнал, а на выходной диагонали D–B находится измерительный прибор. При анализе этой схемы можно использовать такой приём: *точки одинакового потенциала можно объединить в одну, а ветвь с бесконечным сопротивлением можно разорвать*. Данное преобразование является эквивалентным, т. к. остальная схема при этом не меняется.

□ *Пример 4. Пусть задано входное напряжение* $U_{вх} = U_{AC}$ *моста на рис. 4-14 и требуется найти ток измерительного прибора–амперметра.*

Эту задачу можно решить так:

1) Искомый ток I_A находится по первому закону Кирхгофа для узла D как разность $I_A = I_1 - I_4$;
2) Вводится следующее вспомогательное эквивалентное преобразование схемы. Внутреннее сопротивление идеального амперметра равно нулю (сопротивление хорошего амперметра чрезвычайно мало). Следовательно, потенциалы точек B и D равны (это *не* означает, что между ними *не* течёт ток!). Равенство потенциалов двух точек позволяет объединить эти точки, свести их в одну, не оказывая влияния на параметры остальной схемы. В результате сведения получается схема рис. 4-14, б. Токи I_1 и I_4, найденные для схемы рис. 4-14, б, верны и для схемы рис. 4-14, а, так как преобразование является эквивалентным. Частичные токи I_1 и I_4 по схеме рис. 4-14, б можно найти следующим образом.
3) С использованием значений входного напряжения и эквивалентного сопротивления схемы ищется входной ток по закону Ома:
$$R_э = R_1 \| R_2 + R_3 \| R_4 \quad \left(= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)$$
$$I_{вх} = U / R_э$$
4) Входной ток I делится между параллельными сопротивлениями пары $R_1 \| R_2$, а затем, слившись, снова делится между параллельными сопротивлениями пары $R_3 \| R_4$, откуда токи I_1 и I_4 находятся по правилу делителя тока:
$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ и } I_4 = I \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$



(а) **(б)** **(в)**

Рис. 4-14. Мостовая схема (а); преобразованные схемы: для источника питания амперметра (б), для источника питания вольтметра (в)

5) Частичные токи первой и четвёртой ветвей можно найти и другим способом. Фрагмент $R_1 \| R_2$, содержащий параллельное соединение сопротивлений R_1 и R_2, и фрагмент $R_3 \| R_4$, содержащий параллельное соединение сопротивлений R_3 и R_4, соединены последовательно, и общее напряжение U можно разделить между ними по правилу делителя напряжения:

$$U_{AB} = U\frac{R_1 \| R_2}{R_1 \| R_2 + R_3 \| R_4} \text{ и } U_{BC} = U\frac{R_3 \| R_4}{R_1 \| R_2 + R_3 \| R_4}.$$

Напряжение U_{AB}, приложенное к $R_1 \| R_2$, применимо и к R_1, и к R_2:

$$U_{AB} = U_{R1} = U_{R2}.$$

Аналогично напряжение U_{BC}, приложенное к $R_3 \| R_4$, применимо и к R_3, и к R_4:

$$U_{BC} = U_{R3} = U_{R4}.$$

Тогда частичные токи I_1 и I_4 могут быть найдены по закону Ома для сопротивлений R_1 и R_4, соответственно:

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} \text{ и } I_4 = \frac{U_{BC}}{R_4}.$$

6) Искомый ток амперметра по исходной схеме рис. 4-14, а равен разности токов I_1 и I_4, найденных в схеме рис. 4-14, б: $I_A = I_1 - I_4$. ■

□ *Пример 5. Пусть задано входное напряжение* $U_{вх} = U_{AC}$ *моста на рис. 4-14 и требуется найти напряжение измерительного прибора–вольтметра.*

Эту задачу можно решить так:

1) Внутреннее сопротивление идеального вольтметра равно бесконечности (сопротивление хорошего вольтметра чрезвычайно велико), что даёт возможность разорвать диагональную ветвь.

2) Записывается уравнение по второму закону Кирхгофа для разорванного контура с вольтметром: $U_V + U_3 - U_4 = 0$.

3) Напряжения U_3 и U_4 находятся по схеме рис. 4-14, в через входное напряжение U по правилу делителя напряжения:

$$U_4 = U\frac{R_4}{R_1 + R_4} \text{ и } U_3 = U\frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

Откуда

$$U_V = U_4 - U_3 = U\frac{R_4}{R_1 + R_4} - U\frac{R_3}{R_2 + R_3} = U\left(\frac{R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) \blacksquare$$

Условие

$$\frac{R_4}{R_1 + R_4} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \qquad (4.27)$$

при котором $U_V = 0$, называется условием компенсации моста. Такой режим важен при практическом использовании моста. При этом внутреннее сопротивление источника может быть любым.

□ *Пример 6. Пусть в схеме рис. 4-15 требуется найти показания измерительных приборов (амперметра и вольтметра).*

1) Схема замещения (модель) заданной схемы представлена на рис. 4-16. В ней батарея замещена идеальным источником э. д. с., амперметр и вольтметр для целей расчёта замещены своими внутренними сопротивлениями: бесконечным (разрыв) и нулевым (стяг), соответственно. Метод решения – стягивать эквипотенциалы (точки с одним потенциалом) в узлы: оказываются совмещёнными точки B и D, а также точки C, 0 и E. Результирующая схема изображена на рис. 4-17. Ток амперметра находится из

уравнения по закону токов Кирхгофа, например для узла B: $I_A = I_2 - I_1$. Напряжение узла F находится с использованием метода делителя напряжения.

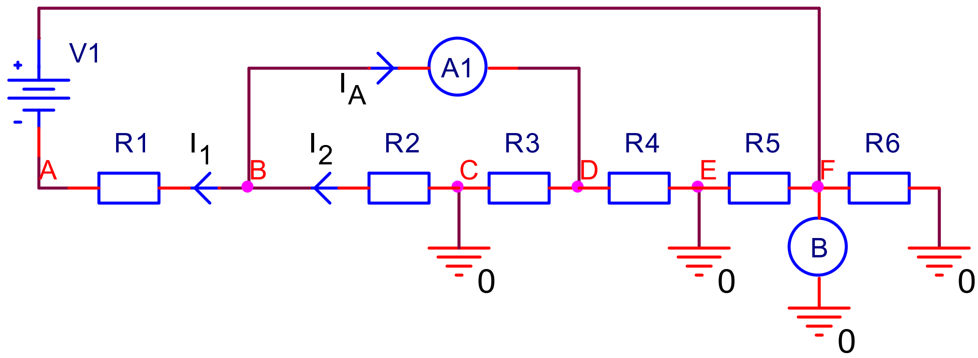


Рис. 4-15. ЭПС (принципиальная схема) устройства для расчёта

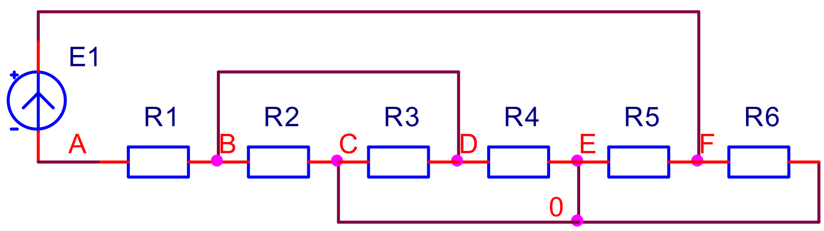


Рис. 4-16. ЭСЗ (схема замещения, модель) устройства для расчёта

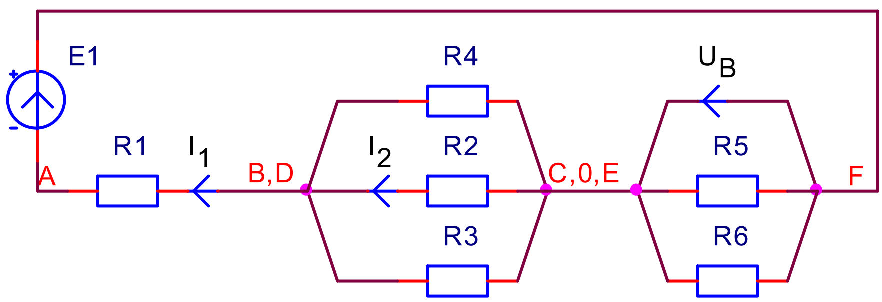


Рис. 4-17. Итоговая схема замещения

2) Эквивалентное сопротивление схемы оказывается равным $R_э = R_1 + R_2 \| R_3 \| R_4 + R_5 \| R_6$ (сопротивление трёх параллельных элементов можно найти, объединив сначала какие-нибудь два из них, а результат объединив с третьим).

3) Общий ток по закону Ома равен $I = E_1 / R_э$. Ток $I_1 = I$. Ток I_2 равен:

$$I_2 = I\frac{\left(R_3 \parallel R_4\right)}{\left(R_3 \parallel R_4\right)+\left(R_2\right)}.$$

Для расчёта этого выражения можно сначала отдельно посчитать $R_3 \parallel R_4 = R_3R_4\big/\left(R_3+R_4\right)$.

Так как преобразование схемы было эквивалентным, то такие же токи I_1 и I_2 текут и в исходной схеме. Следовательно, ток амперметра равен $I_A = I_2 - I_1$.

4) Напряжение вольтметра находится с помощью метода делителя напряжения (по схеме рис. 4-17):

$$U_V = E\frac{\left(R_5 \parallel R_6\right)}{\left(R_5 \parallel R_6\right)+\left(R_1 + R_2 \parallel R_3 \parallel R_4\right)}.\blacksquare$$