

5.5. Резонанс в электрических цепях

Явление резонанса в цепи, содержащей реактивные элементы, состоит в резком увеличении тока в цепи и напряжения на элементах при подаче на схему синусоидального сигнала определённой (*резонансной*) частоты.

Явление резонанса может применяться в технике. Например, с его помощью колебательный контур радиоприёмника настраивается на определённую частоту радиосигнала; в эфире существуют сигналы множества частот на малой амплитуде. Резонанс позволяет резко увеличить амплитуду сигнала на выбранной частоте и выделить её из числа многих, т. е. резонансный контур радиоприёмника работает как узкополосный фильтр. Таким же способом передаются телефонные разговоры многих абонентов по одной паре проводов в магистральной линии: они передаются в разных диапазонах частот, или что то же самое, на разных несущих частотах; при этом на сигнал высокой несущей частоты накладывается содержательный звуковой сигнал; такой процесс называется модуляцией; в конечном устройстве – приёмнике абонента происходит демодуляция: нужный диапазон частот вокруг настраиваемой несущей частоты усиливается резонансным устройством – фильтром.

Резонансные явления могут играть и отрицательную роль. Возникновение в энергетических высоковольтных цепях нежелательных паразитных колебательных контуров с увеличенными напряжениями способно вызвать большие потери энергии и даже разрушения.

5.5.1. Физические процессы, обуславливающие резонанс (на примере RLC-контра)

Рассмотрим простейшую R-L-C-цепь (см. рис. 5-6), состоящую из последовательно соединённых сопротивления, индуктивности и ёмкости.

В отсутствие внешних воздействий в такой цепи происходит обмен электро-магнитной энергией между реактивными элементами: ёмкостью (элементом, накапливающим энергию электрического поля) и индуктивностью (элементом, накапливающим энергию магнитного поля). Когда заряженная ёмкость начинает разряжаться, это создаёт ток в ветви в соответствии с дифференциальным уравнением $i = C du/dt$, вызывая увеличение энергии индуктивности. Когда ёмкость полностью разряжается, процесс начинает протекать в обратном направлении: энергия индуктивности через посредство тока передаётся ёмкости до полного разряда индуктивности. Эти пульсации энергии, а также тока в цепи и напряжения на элементах, происходят с постоянной частотой ω_0 , зависящей только от номиналов реактивных элементов, и называемой *частотой собственных колебаний*:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.27)$$

Примечание. В более сложных схемах выражение для частоты собственных колебаний отличается от (5.27) и может быть выведено из условия резонанса (см. ниже).

Если в цепи нет сопротивлений (элементов, преобразующих энергию из электрической формы в тепловую), то обмен энергией между реактивными элементами может происходить бесконечно долго. В реальности в цепи всегда есть сопротивление (паразитные сопротивления элементов и проводов); в таких условиях колебания постепенно затухают со скоростью, зависящей от величины сопротивления. Частота этих колебаний от сопротивления не зависит и сохраняется постоянной.

В случае если к схеме подключить источник переменного сигнала с частотой ω , равной частоте собственных колебаний ω_0 , то такой источник будет восполнять потери энергии, вызванные сопротивлением. Т. е. энергия, потребляемая схемой, целиком расходуется на потери в сопротивлении.

5.5.2. Виды резонанса

Резонанс в электрической цепи может быть двух видов: резонанс токов или резонанс напряжений.

Резонанс напряжений – явление, происходящее в сколь угодно сложном пассивном двухполюснике, содержащем реактивные элементы разного характера, при котором на некоторой частоте $\omega_0 \neq 0$ входное реактивное сопротивление этого двухполюсника $X_{ex} = 0$. Как можно заметить, входной ток и напряжение при этом совпадают по фазе. Последнее условие легко вывести, принимая во внимание, что разность фаз входного тока и напряжения равна фазе входного сопротивления (см. уравнение (5.14)). А фаза комплексного числа, каким является Z_{ex} , равна арктангенсу отношения его мнимой и действительной частей:

$$\varphi(\omega_0) = \operatorname{arctg} \frac{X_{ex}(\omega_0)}{R_{ex}(\omega_0)} = 0. \quad (5.28)$$

Другими словами, чтобы входной ток и напряжение совпадали по фазе, необходимо, чтобы входное сопротивление было чисто действительным.

Резонанс токов – явление, происходящее в сколь угодно сложном пассивном двухполюснике, содержащем реактивные элементы разного характера, при котором на некоторой частоте $\omega_0 \neq 0$ входная реактивная проводимость этого двухполюсника $B_{ex} = 0$.

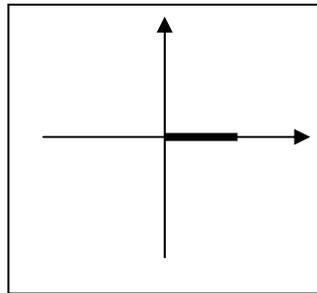


Рис. 5-12. Чисто действительное сопротивление

5.5.3. Резонанс напряжений

Рассмотрим частотные зависимости различных параметров схемы и их значения **при резонансе** на примере RLC-контура.

Комплексное входное сопротивление при равенстве нулю реактивной части $X_{ex} = 0$ становится равным активной части:

$$\underline{Z}_{ex}(\omega_0) = R_{ex}(\omega_0) + jX_{ex}(\omega_0) = R_{ex}(\omega_0). \quad (5.29)$$

Полное сопротивление (модуль комплексного сопротивления) при резонансе имеет минимальное значение:

$$z_{ex}(\omega_0) = \sqrt{R_{ex}^2(\omega_0) + X_{ex}^2(\omega_0)} = R_{ex}(\omega_0). \quad (5.30)$$

Емкостное и индуктивное сопротивление при резонансе равны:

$$\begin{aligned} X_{ex}(\omega_0) = X_L(\omega_0) - X_C(\omega_0) = 0 & \Rightarrow X_L(\omega_0) = X_C(\omega_0) \\ X_L(\omega_0) = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho, & \quad X_C(\omega_0) = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \end{aligned} \quad (5.31)$$

где ρ — *характеристическое*, или *волновое*, сопротивление цепи.

Частотные характеристики $U_C(\omega)$ и $U_L(\omega)$ можно выразить как:

$$\begin{aligned} U_L(\omega) &= I(\omega) \cdot \omega L \\ U_C(\omega) &= I(\omega) \cdot 1/\omega C \end{aligned} \quad (5.32)$$

Максимум U_L наступает позже максимума тока, т. е. $\omega_L > \omega_0$, т. к. U_L равно произведению I на возрастающую величину ωL . Соответственно, максимум U_C наступает раньше максимума тока, т. е. $\omega_C < \omega_0$.

Равенство емкостного и индуктивного сопротивления приводит к тому, что напряжения на индуктивности \dot{U}_{Lm} и ёмкости \dot{U}_{Cm} противоположны по значению и компенсируют друг друга:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{Lm} &= jX_L(\omega_0) \cdot \dot{I}_{exm} = j\rho \dot{I}_{exm}, \\ \dot{U}_{Cm} &= -jX_C(\omega_0) \cdot \dot{I}_{exm} = -j\rho \dot{I}_{exm} \end{aligned} \quad (5.33)$$

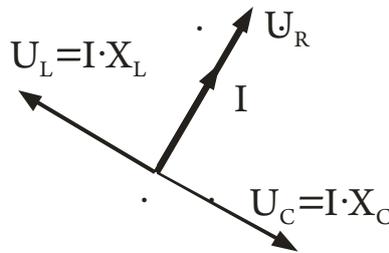


Рис. 5-13. Векторная диаграмма цепи при резонансе

Входное напряжение, таким образом, при резонансе падает только на сопротивлении:

$$\dot{U}_{exm}(\omega_0) = Z_{ex} \cdot \dot{I}_{exm}(\omega_0) = R_{ex}(\omega_0) \cdot \dot{I}_{exm}(\omega_0) = \dot{U}_{Rm}(\omega_0). \quad (5.34)$$

Следовательно при резонансе ток максимален и равен:

$$\dot{I}_{exm}(\omega_0) = \frac{\dot{U}_{exm}}{R_{ex}(\omega_0)}. \quad (5.35)$$

Отношение амплитуд напряжений на реактивном элементе (5.33) и на входе (5.34):

$$\frac{U_{Lm}}{U_{вхm}} = \frac{U_{Cm}}{U_{вхm}} = \frac{\rho I_{вхm}}{R_{вх} I_{вхm}} = \frac{\rho}{R_{вх}} = Q \quad (5.36)$$

определяется *добротностью контура*:

$$Q = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{\omega_0 L}{R}. \quad (5.37)$$

Добротность определяет резонансные свойства контура — она показывает, какого увеличения напряжения на реактивных элементах можно ожидать по сравнению со входным напряжением. Если реактивное сопротивление при резонансе превосходит активное сопротивление, то напряжения на зажимах катушки и конденсатора могут превосходить, и иногда весьма значительно, входное напряжение:

$$X_C = X_L > R \Leftrightarrow \rho > R \Leftrightarrow Q > 1 \quad (5.38)$$

Величина, обратная добротности, называется *затуханием контура*:

$$d = \frac{1}{Q} \quad (5.39)$$

5.5.4. Частотные характеристики простейшего R-L-C-контура

На рис. 5-14 приведён пример моделирования рассмотренных выше фазо-частотных характеристик для последовательного RLC-контура с параметрами элементов и сигналов: $C = 1$ мкФ, $L = 15$ мГн, $R = 65$ Ом, $U_{вхm} = 2$ В; частота меняется от 100 до 3500 Гц; резонансная частота контура равна $f_0 \approx 1,3$ кГц. В качестве тренировки рекомендуется рассчитать характерные точки, отмеченные на графиках.

Список изображённых графиков (сверху вниз):

- 1) индуктивное X_L , емкостное $-X_C$ и реактивное X сопротивление;
- 2) полное сопротивление z (амплитуда комплексного сопротивления);
- 3) ток I контура;
- 4) напряжение U_R на сопротивлении;
- 5) напряжение U_L на индуктивности, U_C на ёмкости;
- 6) разность фаз $\varphi = \Delta\psi$ между входным напряжением и током.

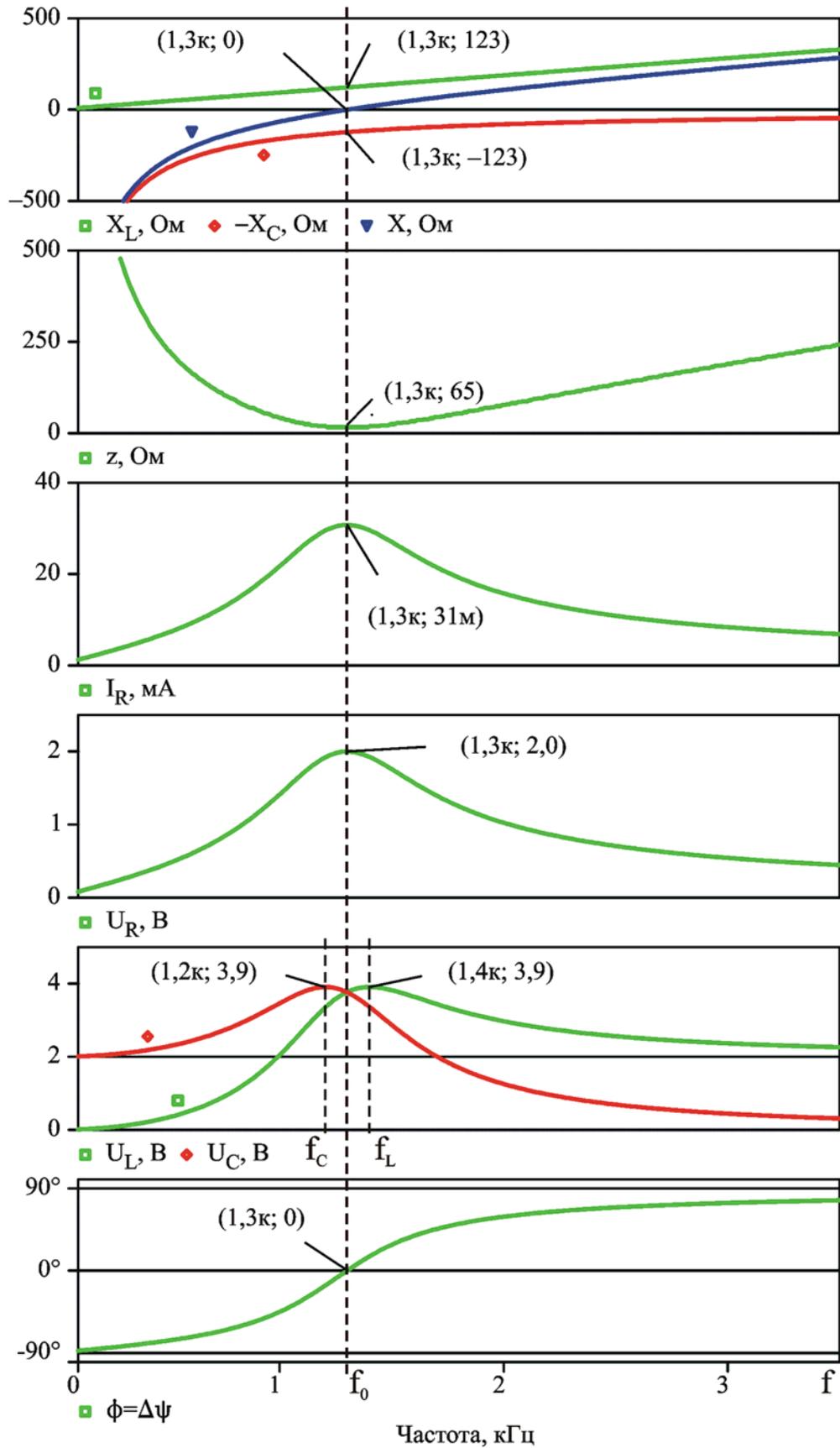


Рис. 5-14. Фазо-частотные характеристики R-L-C-контура